Министерство образования и науки Российской федерации
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет»
Центр переподготовки и повышения квалификации преподавателей
Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа

Теоретические и прикладные аспекты решения задач высокого уровня сложности в системе школьного математического образования

Практикум

Часть 1

Барнаул
Издательство Алтайского государственного университета
2014

Составители:
канд. физ.-мат. наук, доцент АлтГУ **А.Н. Саженков**;
доцент АлтГУ **Т.В. Саженкова;**

Рецензент:
канд. тех. наук, доцент АлтГУ **С.П. Пронь**

Цель практикума – совершенствование предметной компетентности учителя математики в направлении обучения учащихся решению задач высокого уровня сложности. Его актуальность и значимость сегодня усиливается тем, что Министерство образования и науки РФ уже в 2015г. разделит Единый государственный экзамен на два уровня – «базовый» и «профильный».

Для достижения такого рода целевых установок требуется и специальная подготовка педагогов, которая может быть осуществлена в рамках повышения квалификации.

В практикуме представлены избранные классические олимпиадные темы по математике, а также ряд тем элементарной математики с задачами высокого уровня сложности. В пособии приведены примеры решения задач по рассматриваемым темам различного уровня сложности – как простые иллюстративные, так и достаточно сложные многошаговые.

Пособие адресовано школьным учителям, слушателям системы дополнительного профессионального образования, а также студентам математических факультетов педагогических вузов.

План УМД 2014 г., п.

Подписано в печать Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. . Тираж 100 экз. Заказ

Типография Алтайского госуниверситета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Характеризуя высокий уровень математической подготовки выпускника общеобразовательного учреждения, принято выделять следующие качества:

- прочное владение системой математических знаний;
- умение построить математическую модель ситуации, исследовать её и проанализировать результаты исследования;
- умение синтезировать информацию из различных разделов математики для решения поставленной проблемы;
- умение построить логически верную цепочку математических утверждений, шагов решения, приводящих к обоснованному выводу;
- умение математически и логически грамотно записать решение.

Вместе с тем, по результатам ГИА и ЕГЭ констатируется крайне низкий уровень знаний и умений учащихся по целому ряду тем программного учебного материала по математике и так называемым олимпиадным темам:

- геометрия и теория чисел,
- параметрические задачи и графические методы решения,
- оценка частей уравнений и неравенств и поведение функций

и т.д.

В этих условиях возрастают требования к учителю математики современной школы, который должен обладать высоким уровнем профессионализма, отражающим глубокие знания в области математики как науки и преподаваемого учебного предмета, способностью к его методической инструментовке, развитую математическую культуру и др.

Для достижения такого рода целевых установок требуется специальная подготовка педагогов, которая может быть осуществлена в рамках повышения квалификации.

Здесь можно вооружить преподавателя инструментарием по избранным классическим олимпиадным темам по математике, а также по темам элементарной математики с задачами высокого уровня сложности. Снабдить достаточно обширным набором примеров решения задач по рассматриваемым темам различного уровня сложности: от простых иллюстративных до достаточно сложных многошаговых.

Логические задачи

1. Школьник говорит: позавчера мне еще было 10 лет, а в следующем году исполнится 13. Может ли такое быть?

2. На озере выросла кувшинка, на следующий день их стало две, затем 4, 8 … . На тридцатый день озеро заросло полностью. На какой день озеро было заросшим наполовину?

3. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?

4. Из числа 12345543211234554321112345 вычеркните 10 цифр так, чтобы оставшееся число было максимально возможным.

5. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 5 см, а за каждую ночь спускается на 4 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота 75 см?

6. Из кучи, содержащей 42 предмета, двое игроков берут поочередно не более четырех предметов. Выигрывает тот, кто своим очередным ходом забирает все оставшиеся предметы. Вопрос: есть ли выигрышная стратегия для первого игрока?

7. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых бумажек так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельки?

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух жителей *А* и *Б*, при этом *А* произнес фразу: «По крайней мере, один из нас лжец». Можно ли определить, кем является *А* и кем является *Б*?

9. Из стакана молока переливают одну чайную ложку в стакан с чаем и перемешивают. Затем чайную ложку смеси возвращают в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в молоке или молока в стакане с чаем?

10. В январе некоторого года было 4 пятницы и 4 понедельника. Каким днем недели тогда было сегодняшнее число?

11. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

12. За круглым столом сидят 9 человек – рыцари и лжецы. Каждый из них произнес фразу: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Кто сидит за столом? А если их семеро?

13. Два человека хотят разделить кучу золотого песка так, чтобы не иметь претензий друг к другу. У них под рукой нет весов. Как это сделать? Как поступать при дележе кучи песка при трёх претендентах (исключайте возможность сговора двух против одного)?

14. Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

Четность и чередование

Главные идеи темы:

1. В ряде натуральных чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, 2n-1, 2n, \ldots$ нечетные и четные числа чередуются.

2. Если конечное множество разбивается на пары, то количество элементов в нем – четное.

3. Сумма и разность четного и нечетного чисел – нечетна, сумма и разность двух чисел одинаковой четности – четна. Произведение нескольких целых чисел четно тогда и только тогда, когда среди них есть четное число.

Пример 1. По кругу стоит 2001 коробка. В каждой коробке лежат черные и белые шарики, а на коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько – белых. Игорь хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую коробку (по часовой стрелке) так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Удастся ли ему это?

Решение. Нет, не удастся. Обозначим коробки по кругу: $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$.Предположим, что из a_{2001} в a_1 переложили белый шар. Тогда, для того чтобы надпись на a_1 была неправильной и по черным шарам, из a_1 в a_2 должен быть переложен черный шар. И далее цвета переложенных шаров должны чередоваться: из a_2 в a_3 – белый, из a_3 в a_4 – черный,…, из a_{2000} в a_{2001} – белый. Но тогда в a_{2001} количество белых и черных шаров сохранились.

Пример 2. Можно ли нарисовать девятизвенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение. Из условия следует, что множество звеньев разбивается на пары пересекающихся между собой. Тогда количество звеньев должно быть четным, но 9 нечетное число.

Пример 3. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2013?

Решение. Пусть $a \cdot b \cdot (a-b) = 2013$. Число 2013 нечетное, значит, все три сомножителя нечетны, но из нечетности a и b следует четность a–b. Противоречие.

Пример 4. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.

Решение. Пусть $\{a_1, a_2, ..., a_{100}\}$ данный набор, $S = a_1 + a_2 + ... + a_{100}$.После замен получаем набор $\{S - a_1, S - a_2, ..., S - a_{100}\}$.Его суммой является число $(S - a_1) + (S - a_2) + ... + (S - a_{100}) = 99S$. Поскольку полученный набор тот же имеем равенство $S = 99S$. Следовательно $S = 0$. Значит, для каждого числа a из данного набора в этом наборе есть число $S - a = -a$ противоположное по знаку. Числа различны, поэтому нуль не входит в набор. Значит, среди этих чисел 50 положительных и 50 отрицательных, следовательно, их произведение положительно.

Пример 5. В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?

Решение. Ответ. Не может. Пусть условие задачи выполнено. Тогда каждой покрашенной клетке A поставим в соответствие клетку B (отличную от A) того же цвета, находящуюся в квадрате 3×3 с центральной клеткой A. По условию для данной клетки A клетка B определяется единственным образом. Заметим, что клетка A находится в квадрате 3×3 с центральной клеткой B, значит, клетка A поставлена в соответствие клетке B. Таким образом, рассмотренное соответствие разбивает все покрашенные клетки на пары. Однако, количество покрашенных клеток равно 99^2 – нечетному числу. Противоречие.

Пример 6. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?

Решение. Ответ. Нет, нельзя. Простые числа, полученные в результате сложений по строкам и столбцам – нечетные (результат сложения больше 2). Значит сумма всех чисел таблицы, с одной стороны, должна быть нечетной как сумма девяти нечетных чисел, с другой стороны, четной, как сумма четного числа (2002) нечетных чисел.

1. Шахматный конь вышел с поля *a*1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

2. В лесу на Мюнхгаузена напала стая волков. Когда он проскочил на лошади мимо двух волков, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхгаузен повторял этот маневр еще раз, и еще, до тех пор, пока все волки не загрызли друг друга. Могло ли в стае быть 97 волков?

3. На доске 25×25 расставлено 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно одной из больших диагоналей. Докажите, что, по крайней мере, одна из шашек расположена на диагонали.

4. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных в кольцо. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

5. Барон Мюнхгаузен, вернувшийся из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересек границы своего княжества 13 раз. Верите ли Вы ему?

6. Учитель написал на листке бумаги число 20. Тридцать три ученика передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 10?

7. На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Может ли он иметь длину 1999? А длину 2000?

8. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

9. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы в результате получился 0?

10. Произведение 10 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

11. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала: «Это обман!». Почему?

12. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно по одному разу?

13. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 1999 раз. Могут ли после этого все шайбы остаться на исходных местах?

14. Может ли ладья обойти все клетки доски 7×7, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, не побывав ни в одной клетке дважды?

15. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной не самопересекающейся ломаной, пересекать все ее звенья?

16. 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле в классической формулировке утверждает:

если в n клетках сидит $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух кроликов.

Докажем его. Предположим, что в каждой клетке сидит менее двух кроликов (один или ни одного). Тогда во всех n клетках в совокупности сидит не более n кроликов. Противоречие.

Более общая форма принципа Дирихле:

если в $n \cdot k$ клетках сидит не менее $nk+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k + 1$ кроликов.

Приведем ещё несколько версий принципа Дирихле:

если n кроликов сидят в N клетках, то найдётся клетка в которой сидит не менее n/N кроликов и найдётся клетка в которой сидит не менее n/N кроликов;

если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше 1, то, по крайней мере, два из них имеют общую точку;

если произведение n положительных чисел больше p^n, то хотя бы одно из этих чисел больше p.

Приведенные утверждения легко доказываются от противного.

Пример 1. Докажите, что среди любых одиннадцати натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

Решение. Рассмотрим последние цифры у одиннадцати натуральных чисел. Цифр всего – 10, значит, по крайней мере у двух данных чисел последние цифры совпадают. Вычтем из большего меньшее и получим число с последней цифрой 0.

Пример 2. В ящике лежит 100 флажков: красных, зеленых, желтых, синих. Какое наименьшее число флажков надо взять, не глядя, чтобы среди них нашлось не менее 10 одноцветных?

Решение. Ответ: 37. Если взять 36 флажков, то возможна ситуация при которой у нас будет по 9 красных, зеленых, желтых и синих флажков. Следовательно, если взять 37, то среди них найдётся не менее 10 одноцветных.

Пример 3. Докажите, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

Решение. Каждому из шести человек сопоставим точку на плоскости. Соединим точки синей линией, если два человека, соответствующие этим точкам, знакомы между собой и красной, если не знакомы. Теперь возникает задача доказать, что найдётся одноцветный треугольник. Рассмотрим произвольную точку. Из неё к остальным точкам выходит пять линий, окрашенных в два цвета. Следовательно, найдутся три одноцветных. Будем считать, что это красные линии и рассмотрим три точки, к которым они идут. Если хотя бы две из них соединены красной линией, то имеем красный треугольник, а вместе с ним трёх попарно незнакомых людей. А если красной линии нет, то получаем синий треугольник, а вместе с ним трёх попарно знакомых людей.

Пример 4. Числа 1, 2, 3,..., 7 разбиты на две группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп меньше 71.

Решение. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 70 \cdot 72$ Обозначим a и b – произведение чисел в этих группах. Тогда $a \cdot b = 70 \cdot 72 = (71-1) \cdot (71+1) = 71^2 - 1 < 71^2$. Значит a или b меньше чем 71.

Пример 5. Ситцевая ткань раскрашена в два цвета. Докажите, что иголку всегда можно расположить так, что ее концы будут лежать на точках одного цвета.

Решение. Поместим на ткань равносторонний треугольник с длиной стороны равной длине иголки. Вершины этого треугольника (их три) будут окрашены в два цвета. Значит, по крайней мере, две вершины будут одноцветными

1. Дано 12 целых чисел. Докажите, что среди них можно выбрать два, разность, которых делится на 11.

2. В школе учится 1000 учащихся. Докажите, что найдутся трое учащихся, у которых дни рождения совпадают.

3. За круглым столом сидит 100 человек, из них 51 мужчина. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят друг против друга, а какие-то двое рядом.

4. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число 1, 2 или 3. Могут ли суммы чисел во всех строках, столбцах и больших диагоналях быть различными

5. На доске 6×6 расположен корабль в виде трехклеточного уголка. Какое наименьшее число выстрелов требуется, чтобы наверняка его ранить?

6. Некоторые из клеток таблицы 5×5 окрашены в красный цвет, а остальные – в синий. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

7. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что в ней найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

8. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдется отрезок, у которого оба конца и середина одного цвета.

9. Среди жителей Москвы не менее 10 миллионов человек в возрасте не больше 100 лет. Докажите, что найдутся 270 человек, родившихся в один год и день.

10.Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что в ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами.

11.Докажите, что в любой компании найдутся два человека, у которых одинаковое число знакомых в этой компании (возможно, ни одного).

12.В стране 15 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Докажите, что из каких-то двух городов ведет одинаковое число.

13.Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.

14.На плоскости дано множество из $n \geq 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

15.Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности.

16.Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета?

Взвешивания

В большинстве задач на взвешивание, взвешивание производится на чашечных весах без гирь. Результатом взвешивания является или равенство (равновесие) масс, положенных на каждую чашу, или неравенство (больше, меньше) масс, то есть перевешивание одной из чаш. Считаем, что взвешивания производятся именно так, кроме случаев оговоренных особым образом.

Пример 1. Есть 9 монет, одна из которых фальшивая (она легче настоящей). За два взвешивания определите фальшивую монету.

Решение. Первое взвешивание: положим на каждую чашу по 3 монеты. Покажем, что в результате можно выделить три монеты, среди которых есть фальшивая. Действительно, если на весах равновесие, то фальшивая среди трех монет, не участвовавших во взвешивании, а если одна чаша легче другой, то монета на ней.

Второе взвешивание: из трех монет, среди которых есть фальшивая, возьмем две и положим по одной на каждую чашу. Если равновесие, то фальшивой является третья монета, а если одна чаша легче другой, то монета на ней.

Пример 2. Есть 10 монет, одна из которых фальшивая (она легче настоящей). Можно ли за два взвешивания гарантированно определить фальшивую монету?

Решение. Покажем, что это невозможно.

Любое взвешивание – это разбиение монет на три группы: группа монет попавших на одну чашу, группа монет попавших на другую чашу и группа монет не участвовавшая во взвешивании. Теперь заметим, что если производилось два взвешивания для 10 монет, то независимо от способа взвешиваний какие-то две монеты оба раза оказывались в одной группе. Действительно, при первом взвешивании из 10 монет не менее четырех попали в одну группу (принцип Дирихле). Эти монеты при втором взвешивании распределились по трем группам, значит, не менее двух монет опять попали в одну группу. Если из этих двух монет одна фальшивая, то нет возможности гарантированно определить ее.

Пример 3. Есть 12 монет, одна из которых – фальшивая, однако неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящей монеты по весу. За три взвешивания найдите эту монету.

Решение. Обозначим монеты $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4$.

Первое взвешивание: на одну чашу положим a_1, a_2, a_3, a_4, на другую – b_1, b_2, b_3, b_4.

Случай 1. На весах равновесие.

Это означает, что в первом взвешивании участвовали только настоящие монеты, а среди монет c_1, c_2, c_3, c_4 – одна фальшивая.

При втором взвешивании на чаши кладем c_1, c_2 и c_3, a_1.

Подслучай 1. На весах равновесие.

Это означает, что c_4 фальшивая монета.

Подслучай 2. Если c_1, c_2 легче, чем c_3, a_1.

Это означает, что c_4 – настоящая, а среди монет c_1, c_2 есть легкая фальшивая или c_3 – тяжелая фальшивая монета.

При третьем взвешивании на чаши кладем c_1, c_3 и a_1, a_2. Равновесие будет означать, что c_2 фальшивая. Если c_1, c_3 легче, чем a_1, a_2, то фальшивая монета – легкая. Из c_1, c_3 ею может быть только c_1. Если c_1, c_3 тяжелее, чем a_1, a_2, то фальшивая монета – тяжелая и ею является c_3.

Подслучай 3. c_1, c_2 тяжелее, чем c_3, a_1.

При третьем взвешивании на чаши кладем c_1, c_3 и a_1, a_2. Если равновесие, то c_2 – фальшивая. Если c_1, c_3 легче, то c_3 – фальшивая. Если c_1, c_3 тяжелее, то c_1 – фальшивая.

Случай 1 рассмотрен полностью.

Случай 2. Если a_1, a_2, a_3, a_4 легче, чем b_1, b_2, b_3, b_4.

Это означает, что c_1, c_2, c_3, c_4 – настоящие.

Второе взвешивание: на одну чашу кладем монеты a_1, b_1, b_2, на другую – a_2, b_3, c_1.

Подслучай 1. На весах равновесие.

Это означает, что фальшивая находится среди a_2, a_4, b_4, при этом среди a_2 и a_4 есть легкая фальшивая монета или b_4 тяжелая. Такая ситуация рассмотрена выше (подслучай 2 случая 1), где замечено, что достаточно одного взвешивания для выявления фальшивой монеты.

Подслучай 2. Если a_1, b_1, b_2 тяжелее, чем a_2, b_3, c_1.

Это означает, что a_1 и b_3 настоящие, а среди монет b_1, b_2 имеется тяжелая фальшивая или a_2 легкая фальшивая. Эта ситуация рассмотрена в подслучае 3 случая 1.

Подслучай 3. Если a_1, b_1, b_2 легче, чем a_2, b_3, c_1.

Это означает, что или a_1 – легкая фальшивая или b_3 – тяжелая настоящая. Третьим взвешиванием сравним a_1 с c_1 и узнаем, является ли она фальшивой. Если она настоящая, то фальшивая b_3.

Случай 3. Если a_1, a_2, a_3, a_4 тяжелее, чем b_1, b_2, b_3, b_4. Этот случай симметричен случаю 2 (с переменой ролей b_i и a_i).

1. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

2. Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, то есть ее вес в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

3. Среди 13 монет имеется одна фальшивая (отличающаяся по весу от настоящей). Найдите её с помощью не более трех взвешиваний.

4. Имеется 101 монет. Среди них 100 настоящих и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать за два взвешивания?

5. Имеются 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все – одинакового веса между собой) и две фальшивых (все – одинакового веса между собой, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний выделить 3 настоящие монеты?

6. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г, 4 г. Одна из них дефектная: более легкая или более тяжелая, чем указано. Можно ли за два взвешивания узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

7. Девять гирек расположены по кругу. Известно, что одна из них имеет массу 1 г, а за ней последовательно по ходу часовой стрелки расположены гирьки массами 2 г, 3 г,…, 9 г. Размеры гирек одинаковы и других гирь нет. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить гирьку массой 1 г?

8. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

9. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина – алюминиевые массой 10 г, а остальные – дюралевые массой 9,9 г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них – одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

10. Имеется 6 гирь: по паре зеленых, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая – легкая, причем все тяжелые гири весят одинаково, и все легкие гири весят одинаково. За два взвешивания определите все 3 тяжелые гири.

11. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно, ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантировано проверить это за 13 взвешиваний?

12. Имеется 6 монет, некоторые из них – фальшивые (более легкие). Не более чем за четыре взвешивания найдите все фальшивые монеты.

Подсчёт двумя способами

Пример 1. Можно ли в клетках таблицы 5×5 записать числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

Решение. Нет, нельзя. Подсчитываем сумму всех чисел таблицы двумя способами: если считать сумму по строчкам, получим положительное число, а если по столбцам, то отрицательное число.

Пример 2. Фирма проработала год, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной. а) Может ли суммарная прибыль за весь год быть положительной? б) А за первые 11 месяцев?

Решение. *а*) Нет, не может. Разбиваем 12 месяцев не пары подряд идущих и получаем, что суммарная прибыль за год есть сумма шести отрицательных чисел. б) Да, может. Пример: прибыль в нечетные месяцы +6, в четные –7.

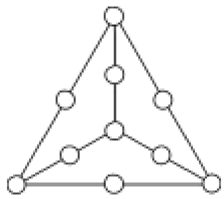
Пример 3. Можно ли расставить неотрицательные числа в квадрате 4×4 (по одному в каждую клетку) так, чтобы в любом кресте из пяти клеток сумма чисел была равна 12, а в квадрате 3×3 без центральной клетки сумма чисел 8?

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*j*	*k*	*l*
m	*n*	*o*	*p*

Решение. Нет, нельзя. Предположим, что это удалось. Обозначим числа буквами латинского алфавита (см. рисунок). Тогда $a+b+c+g+k+j+i+e=8$, $b+e+f+g+j=12$, отсюда $f=4+a+c+k+i\geq 4$. Точно также можно заметить, что $g\geq 4, k\geq 4, j\geq 4$. Значит, для квадрата 3×3 с центральной клеткой f имеет место неравенство: $a+b+c+g+k+j+i+e\geq 12$, противоречие.

Пример 4. Можно ли записать натуральные числа от 1 до 16 в строчку так, чтобы сумма любых четырех подряд идущих чисел делилась на 3? А любых трех подряд?

Решение. Положительный ответ на первый вопрос – даёт пример: 1, 2, 3, …,15, 16. Ответ на второй вопрос – отрицательный. Действительно, если бы это было возможно, то, расставив скобки $(a_1+a_2+a_3+a_4)+\ldots+(a_{13}+\ldots+a_{16})$, получим, что сумма чисел от 1 до 16 делится на 3, что не верно.



Пример 5. Можно ли в кружочках расставить все целые числа от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел по любому из шести отрезков была одной и той же?

Решение. Нет, нельзя. Обозначим числа, стоящие в вершинах (большого) треугольника через *a,b,c*, а число, стоящее в центре, через *d*.

Предположим, что сумма трех чисел по любому из шести отрезков равна S. Тогда $6 \cdot S = 45 + 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c + 2 \cdot d$ - противоречие. Так как 45 (сумма чисел от 0 до 9) - нечетное число.

1. Можно ли заполнить таблицу *а*) 4×4, *б*) 5×5 числами так, чтобы произведение чисел в каждом столбце было положительным, а в каждой строке отрицательным?

2. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей четно, а число улиц делится на 5.

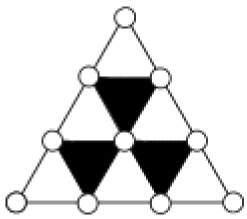
3. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог? (Каждая дорога соединяет два города).

4. На сторонах правильного многоугольника произвольным образом расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

5. Укажите шесть целых чисел таких, что сумма трех подряд идущих чисел положительна, сумма пяти подряд идущих чисел отрицательна. Докажите, что не существует набора из семи чисел с этим свойством.

6. Доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 2×1 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом расположении костей доску можно разрезать на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

7. Можно ли в таблицу 5×5 записать числа 1,2,…,25 так, чтобы в каждой строке сумма некоторых из записанных чисел была равна сумме остальных чисел строки?



8. Можно ли какие-либо десять чисел расставить в кружки данной фигуры так, чтобы сумма чисел в вершинах любого черного треугольника была равна 1996, а сумма чисел в вершинах любого белого треугольника была равна 1997?

9. Можно ли в клетках таблицы 6×6 записать числа от 1 до 36 так, чтобы сумма чисел во всех фигурах вида  делилась на 2?

10.Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белым, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

11.В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку слева направо, сверху вниз. Затем перед числами были поставлены знаки плюс и минус так, что в каждой строке и в каждом столбце их оказалось поровну. Докажите, что сумма всех чисел таблицы равна нулю.

12.Можно ли расставить по кругу числа 1,2,…,60 в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми два числа, делилась на 3,…, сумма любых двух чисел, между которыми шесть чисел, делилась на 7?

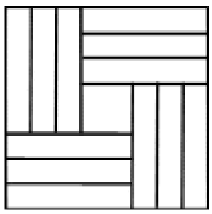
13.Можно ли по кругу расставить от 0 до 9 так, чтобы сумма любых трех рядом стоящих цифр не превосходила: а) 14; б) 15?

14.Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым количеством клеток, принадлежащим уголкам.

15.(Эта задача большая и требует исследовательского подхода к ней). Прямоугольник $m \times n$ назовём хорошим, если его можно покрыть уголками из трех клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым количеством клеток, принадлежащим уголкам. Какие прямоугольники хорошие, а какие – нет?

Оценка + пример

Во многих задачах ставится вопрос о нахождении экстремума некоторой величины, определенной на конечном множестве. Как правило, такие задачи решаются в два шага: находится оценка (сверху, если задача на нахождения максимума) и строится пример, показывающий достижимость полученной оценки.



Пример 1. Какое наибольшее число прямоугольников 1×5 можно вырезать из квадрата 8×8?

Решение. Ответ: 12. Оценка: для 13 прямоугольников необходимо $13 \times 5 = 65$ клеток, а квадрат 8×8 состоит из 64 клеток. Значит прямоугольников не более двенадцати. На рисунке приведён пример двенадцати прямоугольников, которые можно вырезать из квадрата.

Пример 2. Каким наименьшим количеством монет в 3 и 5 коп можно набрать сумму 37 копеек?

Решение. Ответ: 9. Предположим, что при размене было использовано m монет по 3 коп и n монет по 5 коп. Тогда $3m+5n=37$. Из этого следует, что $37\le 5m+5n$ и $m+n\ge\frac{37}{5}=7\frac{2}{5}$, $m+n\ge 8$. Если $m+n=8$, то число $3m+5n$ – чётное как сумма четного количества нечетных чисел. Значит получаем оценку $m+n\ge 9$. Пример: $m=4, n=5$.

Пример 3. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Ответ: 8 ладей. На каждой вертикали должно находиться не более одной ладьи. Значит их не более восьми. Расставив ладей по большой диагонали, получим пример.

Пример 4. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Ответ: 1023457896.

Решение. Во-первых, число должно быть 10-значным. Поскольку будут использованы все 10 цифр, это число гарантированно делится на 9. Следовательно, достаточно обеспечить делимость на 4. Это будет выполняться, если двузначное число, составленное из двух последних цифр, делится на 4. По крайней мере, последние цифры числа должны быть чётными. Рассмотрим варианты с последней цифрой 8. Такими двузначными числами будут 68, 48, 28 и возможное натуральное наименьшее число будет 1023457968. Если последней цифрой будет 6, то двузначными числами будут 96, 76, …, и возможное натуральное наименьшее число будет 1023457896.

Пример 5. Для натурального числа X нашлись такие натуральные числа a, b, c, d, e, f, что $X=a+b+c=d+e+f$; при этом среди чисел a, b, c, d, e, f нет равных. Найдите минимальное возможное значение X.

Решение. Ответ: 11. Заметим, что
$2X=a+b+c+d+e+f>1+2+3+4+5+6=21$, откуда $x\ge 11$. Для числа 11 требуемые числа существуют: $11=1+3+7=2+4+5$.

Пример 6. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

Решение. Ответ: 7. Среди чисел от 1 до 10 на 7 делится только сама семерка. Значит, она должна входить в первую группу, и частное не меньше 7. Приведем пример, когда оно равно 7: $\frac{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot4\cdot9\cdot10}$.

1. Каким наименьшим количеством равносторонних треугольников с длиной стороны меньше 1 можно покрыть равносторонний треугольник со стороной 1?

2. На какое наибольшее количество различных прямоугольников, длины сторон которых – натуральные числа можно разрезать квадрат 5×5?

3. Какое наименьшее значение может принимать $\left|5^n-7^m\right|$, где n и m – натуральные числа?

4. Шестизначное число назовём неразложимым, если оно не раскладывается в произведение четырёхзначного и трёхзначного чисел. Какое максимальное количество неразложимых чисел могут идти последовательно?

5. Какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску?

6. Какое наибольшее произведение цифр может иметь четырехзначное число, делящееся нацело на 4?

7. Какое наибольшее количество a) слонов; b) коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

8. В столовую надо доставить несколько бочек с апельсинами общей массой 10 т. Каждая бочка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трехтонок для этого заведомо хватит?

9. Длина одной из сторон прямоугольника равна 7. Оказалось, что его можно разрезать на прямоугольники 3x2. Какую наименьшую длину могла иметь другая сторона прямоугольника?

10. Какую наибольшую сумму цифр может иметь четырехзначное число, делящееся нацело на 4?

11. Какое наибольшее количество кораблей 1×2 можно уложить на доске 10×10 без нарушения правил «морского боя»:

а) корабли не могут иметь общую сторону клетки 1×1; б) корабли не имеют общих точек?

12. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Не разбившийся орех можно бросать снова)

13. Какое наибольшее число клеток на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех клеточек было хотя бы одна не закрашенная клетка?

14. В наборе из пяти попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

15. Квадрат 10×10 хотят покрыть квадратами 3×3 со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

16. Найдите наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел таких, что произведение любых пяти из них – чётно, а сумма всех 10 – нечётна.

17. На смотре войска Острова Лжецов и Рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге сказал: «Мои соседи по шеренге лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец»). Какое наибольшее число лжецов могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?

Инвариант

Инвариант – это величина, которая не меняется в результате некоторых операций. В качестве инварианта могут выступать: четность, остатки от деления, алгебраическое выражение от данных задачи, выделенная часть объекта, раскраска. Часто легко почувствовать или заметить на примерах присутствие инварианта и весьма не просто отыскать его.

Пример 1. На доске написано 6 нулей и 5 единиц. Двое по очереди стирают два числа и пишут новое по правилу: если стираются два одинаковых, то записывается 0, а если разных, то 1. Первый выигрывает, если остается 1, второй – если 0. Кто выиграет?

Замечание. Сыграв несколько раз, обнаруживаем, что каждый раз остается 1. При внимательном рассмотрении хода игры можно обнаружить, что всегда на доске написано нечетное количество единиц. Теперь легко записать

Решение. Обозначим через S – количество единиц, записанных на доске. Заметим, что S не меняется в случаях, когда стираются два нуля или нуль и единица. В случае стирания двух единиц S меняется на S–2. Таким образом, четность количества единиц не меняется (инвариант). Число 5 – нечетное, значит, в конце игры нечетное количество единиц, т.е. остается 1. Значит, выигрывает первый игрок.

Пример 2. В таблице 3×3 расставлены числа следующим образом: одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить или отнять одинаковое число. Можно ли за несколько ходов получить: *а*) таблицу, во всех клетках которой стоят нули? *б*) таблицу, состоящую из нулей и одной единицы?

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Рис. 1

Решение. Из данной таблицы легко получить таблицу, состоящую из нулей и, тем самым, решить задачу *а*). Обозначим через S сумму чисел таблицы. При выполнении операций новое значение есть S+2 или S–2. Значит, четность S не меняется. Для данной таблицы S – четное, поэтому из нее получить таблицу, состоящую из нулей и одной единицы невозможно.

В этом примере четность суммы чисел таблицы служит инвариантом. Однако не следует считать, что если инварианты у двух объектов одинаковы, то от одного из них можно перейти к другому.

1	3	2
6	8	0
4	9	5

Рис. 2

Пример 3. Можно ли из таблицы примера 2 и по его правилам получить таблицу, представленную на рис. 2?

Замечание. Инвариант примера 2 для обеих таблиц одинаков.

a	b	c
d	e	f
g	h	I

Рис. 3

Решение. Введем обозначения для чисел, стоящих в таблице рис 3, и рассмотрим алгебраическое выражение $I=(a+c+e+g+i)-(b+d+f+h)$. Величина I не меняется при выполнении операций. Для таблицы рис. 1 $I=0$, для таблицы рис. 2 $I=2$, значит, переход от одной к другой невозможен.

Пример 4. На шести елках расположенных по кругу сидят по одному чижу. Если какой-нибудь чиж перелетает на соседнюю елку, то обязательно еще один чиж перелетает на соседнюю елку в противоположном направлении. Могут ли все чижи, перелетая указанным способом, собраться на одной елке?

Замечание. Сделав несколько попыток усадить чижей на одну елку, приходим к выводу, что это невозможно.

Решение. Занумеруем елки по кругу числами от 1 до 6. Предположим, что два чижа с елок, имеющих номера i и j перелетают на соседние. Тогда новые номера елок могут быть только такими: i+1 и j–1, i–1 и j+1, i–5 и j+5, i+5 и j–5 (в случае, когда чижи сидят на елках 1 и 6 и меняются местами); i–5 и j+1, i+5 и j+1, i–1 и j–5, i+1 и j+5 (в случаях, когда только один из них меняет елки 1 и 6). Теперь замечаем, что величина $i+j$ или не меняется или изменяется на 6. Пусть S сумма номеров елок, на которых сидят все шесть чижей. Тогда она также или не меняется или изменяется на 6. Это означает, что остаток от деления на 6 суммы номеров елок не меняется. В исходном положении $S=21$ и имеет остаток от деления на 6 равный 3. В положении, когда все чижи соберутся на елке с номером k $S=6k$, т.е. S имеет остаток 0. Значит, чижи не могут собраться на одной елке.

Пример 5. В клетках квадратной таблицы 3×3 поставлены знаки «+» и «–» как показано на рис. 1. Разрешается в любом столбце или любой строке изменить сразу все знаки на противоположные. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз из данной таблицы получить таблицу, изображенную на рис. 2?

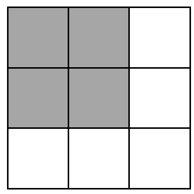
+	+	–
+	+	–
–	–	+

Рис. 1

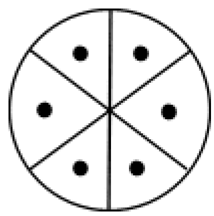
–	–	+
+	–	–
–	–	+

Рис. 2

Решение. Выделим часть таблицы – квадрат 2×2, расположенный в левом верхнем углу таблицы 3×3. При выполнении разрешенной операции четность количества плюсов в выделенной части не меняется. Значит, переход от таблицы рис. 1 к таблице рис. 2 невозможен.



1. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ним сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?



2. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С получившимся числом проделывают то же самое, и так далее – сто раз. Какое в результате получится число?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3,…, 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a+b-1$. Какое число может остаться после 19 операций?

4. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из цифр не равна 9: либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

5. В кружочках (рис. 1) расположены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается выбрать любую пару соседних (соединенных отрезком) и прибавить одно и то же целое число (это число может меняться от шага к шагу). Можно ли из совокупности чисел на рис. 1 получить совокупность чисел, изображенных на рис. 2?

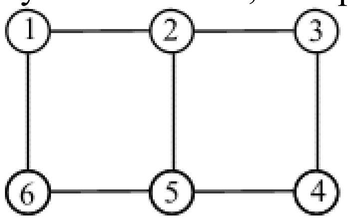


Рис. 1

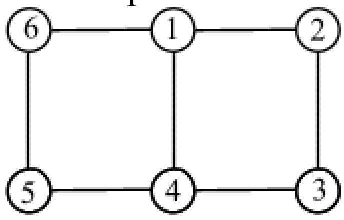


Рис. 2

6. В клетках квадратной таблицы 3×3 поставлены знаки «+» и «–» как показано на рис. 1. Разрешается в любом столбце или любой строке изменить сразу все знаки на противоположные. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз из данной таблицы получить таблицу, изображенную на рис. 2?

+	+	–
+	+	–
–	–	+

Рис. 1

–	–	+
+	–	–
–	–	+

Рис. 2

7. На доске написаны числа 1, 2,…, 42. Разрешается стереть два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться, чтобы остались только нули?

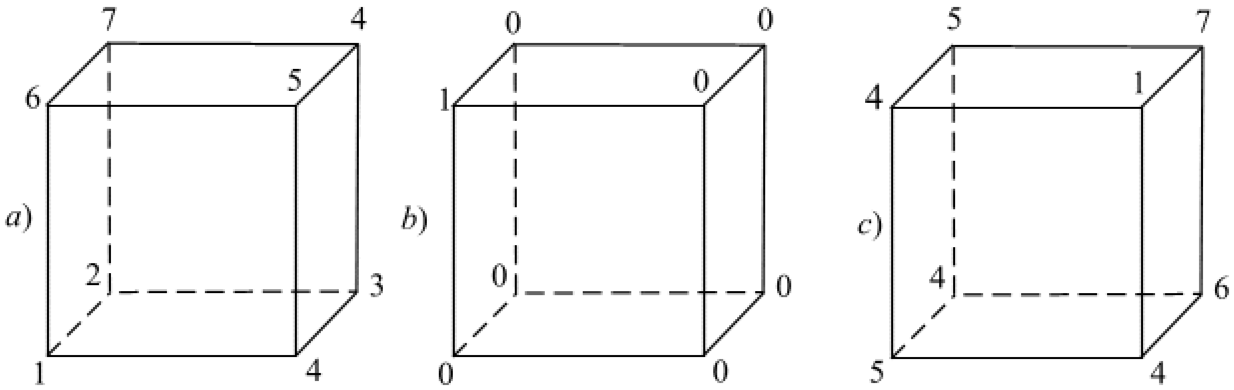
8. По кругу расставлены числа 1, 2,…, 2002 по порядку. Разрешается менять местами любые два стоящие рядом числа, разность которых по модулю больше двух. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы эти числа шли в противоположном порядке?

9. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех камней?

10. На шести елках расположенных по кругу сидят по одному чижу. Если какой-нибудь чиж перелетает на соседнюю елку, то обязательно еще один чиж перелетает на соседнюю елку в противоположном направлении. Могут ли все чижи, перелетая указанным способом, собраться на одной елке?

11. В стране Серобуромалин 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два разноцветных хамелеона, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Смогут ли все хамелеоны стать одноцветными?

12. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным в вершинах любого ребра можно прибавлять по 1. Можно ли за несколько шагов сделать все числа одинаковыми?



13. На главной диагонали доски 10×10 стоит 10 шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?

14. Имеются три кучки камешков – в одной 1989, во второй 989, в третьей 89. Одним ходом разрешается либо убрать из каждой кучи одно и то же количество камней (от хода к ходу это количество может меняться), либо половину камней из какой-либо кучки переложить в другую. Можно ли добиться того, чтобы: *а*) в каких-либо двух кучках не осталось ни одного камня; *б*) во всех трех кучках не осталось камней?

15. С тройкой чисел (a, b, c) можно производить две операции: поменять местами любые два числа или заменить её на тройку $(a, b, 2a+2b-c)$. Можно ли за несколько шагов из тройки $(1, 3, 8)$ получить тройку $(2, 5, 13)$?

16. Семь шестиугольных ячеек окрашены в два цвета: белый и серый. За один ход разрешается, выбрав произвольную ячейку, перекрасить ее и все соседние с ней ячейки в другой цвет. Докажите, что за конечное число ходов из раскраски на рис. 1:

a) можно получить раскраску рис 2;

b) нельзя получить раскраску рис. 3.

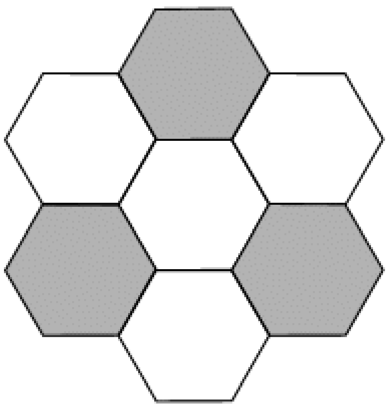


Рис. 1

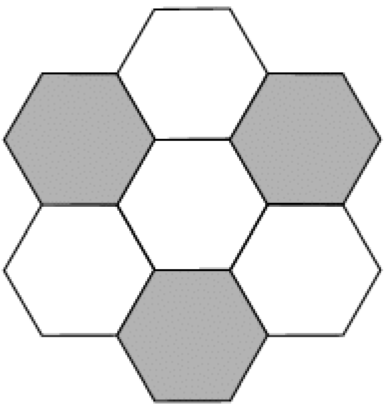


Рис. 2

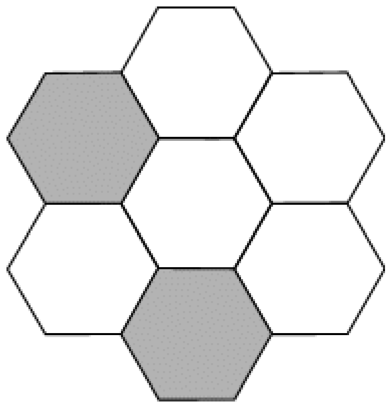
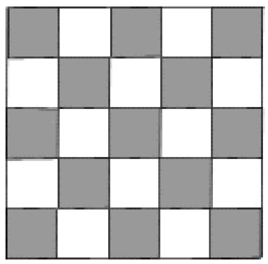


Рис. 3

Раскраска

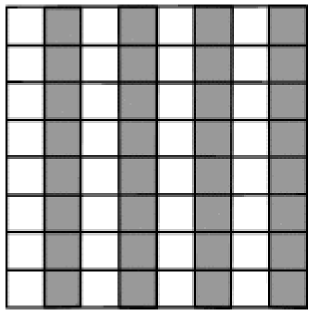


Для решения задач данного раздела необходимо исследуемый объект раскрасить (может быть в несколько цветов).

Пример 1. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и приземляются на соседние по стороне клетки. Докажите, что, по крайней мере, одна клетка станет пустой.

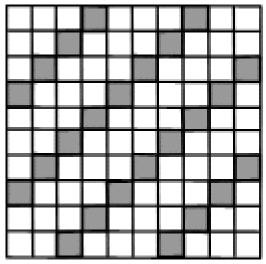
Решение. Выполним шахматную раскраску. Жуки с черных клеток перемещаются на белые и наоборот. Черных клеток 13, белых 12, значит, одна клетка останется пустой – черная.

Пример 2. Можно ли выложить шахматную доску тридцатью двумя доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 – вертикально?



Решение. Нет, нельзя. Выполним раскраску «зеброй». Горизонтальные доминошки закрывают нечетное количество черных клеток, а вертикальные – четное. Вместе они закроют нечетное количество черных клеток, а на доске их четное количество – 32.

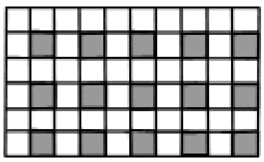
Пример 3. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 1×4?



Решение. Нет, нельзя. Выполним диагональную раскраску, как показано на рисунке. Любое расположение прямоугольника 1×4 накрывает ровно одну черную клетку. Следовательно, прямоугольников не может быть больше чем черных клеток, то есть 24. Этого количества не достаточно.

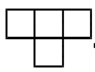
Задача могла быть решена с использованием укрупнённой шахматной раскраской.

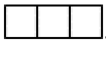
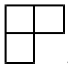
Пример 4. Можно ли выложить прямоугольник 6×10 прямоугольниками 1×4?

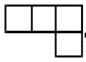


Решение. Нет, нельзя. Выполним раскраску «в горошек» – покрасим в черный цвет клетки, находящиеся на пересечении четных строчек и четных столбцов. Таким образом, будет покрашено 15 клеток. Теперь заметим, что прямоугольник 1×4 в любом положении накрывает четное число черных клеток.

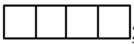
1. Фигура под условным названием «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1,3). Сможет ли «верблюд» с какого-либо поля перейти на соседнее? (Конь ходит типа (1,2)).

2. Можно ли замостить доску 10×10 фигурами вида  ?

3. Пете подарили набор «юный паркетчик», состоящий из 12 триминошек . Хулиган Вася заменил одну из них на уголок . Сможет ли Петя сложить квадрат 6×6?

4. Можно ли выложить квадрат 8×8, используя 15 прямоугольников 1×4 и один уголок вида ?

5. Игра в «морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если известно, что он:

а) имеет вид ;

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

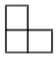
6. На доске 8×8 в левом нижнем углу в виде квадрата 3×3 находятся девять шашек. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат 3×3:

а) в левом верхнем углу доски;

б) в правом верхнем углу доски?

7. Замок имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найти наиболее число залов, которое ему удастся посетить.

8. В квадрате 5×5 вырезали одну из клеток. Можно ли оставшуюся часть квадрата разрезать на трехклеточные уголки?

9. Какое наименьшее число уголков вида  нужно разместить в квадрате 8×8, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры?

10. Из клетчатой доски 7×7 вырезана угловая клетка. Можно ли оставшуюся часть покрыть костями домино так, чтобы ровно половина из них были горизонтальными?

11. «Дельфин» – фигура, которая ходит на одно поле вверх или вправо и по диагонали налево и вниз. Может ли «дельфин», начиная из нижнего левого угла доски размером 8×8, обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз?

12. В фирму по установке решёток на окна поступил заказ из дома, в котором 6 этажей и 6 рядов окон. Менеджер фирмы пролил кофе на листок с заказами. Теперь не видно, от каких квартир поступили заказы. Менеджер сообщил, что он успел изучить все заказы и заметил: среди любых 3 заказанных окон найдутся два, находящиеся в одном ряду или на одном этаже, кроме того, решетки можно изготовить одинаковые. Какое наименьшее число решёток придётся изготовить фирме по этой информации, чтобы обязательно исполнить заказ?

13. Можно ли доску размером $4\times n$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

14. Дан куб $6\times6\times6$. Найти максимально возможное число параллелепипедов $4\times1\times1$, которые можно поместить в этот куб.

15. Прямоугольник $m\times n$ выложен прямоугольниками 1×6. Докажите, что m или n делится на 6.

Полуинвариант

Полуинвариант – величина, которая при выполнении каждого из допустимых действий изменяется только в одну сторону, например, возрастает.

Пример 1. Таблица 15×15 заполнена плюсами и минусами. Разрешается выбрать любую строку или любой столбец и поменять все стоящие там знаки на противоположные. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

Решение. Выбираем строку или столбец, в котором плюсов меньше, чем минусов и меняем все стоящие там знаки на противоположные. Получаем новую таблицу. Нам необходимо заметить, что после нескольких таких операций найти строку или столбец, в котором плюсов меньше, чем минусов не удастся. Следим за общим количеством плюсов в таблице. После каждой такой операции это количество увеличивается. Это означает, что на каждом шаге получаем новую таблицу и ранее встречавшиеся таблицы не повторяются (нет зацикливания). Процесс продолжаться бесконечно долго не может, так как количество разных таблиц – конечное.

Замечание. Полуинвариант – общее количество плюсов во всей таблице – величина, которая в течение этого процесс изменяется «в одну и ту же сторону», а именно увеличиваться и не позволяя ему зацикливаться.

Пример 2. На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа x-2 и y+1. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

Решение. Сумма записанных чисел уменьшается на 1. Если вначале была сумма S, то через $S+1$ ход она станет, равна -1. Значит, хотя бы одно число – отрицательное (Полуинвариант – сумма записанных чисел).

Пример 3. Есть куча из n камней. Разрешается заменять кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в разных кучах). Докажите, что наступит момент, когда уже нельзя будет сделать ни одной такой операции. Куча без камней – не куча.

Решение. С каждым ходом количество куч увеличивается, по крайней мере, на одну. При этом количество камней сохраняется

Пример 4. На плоскости дано $2n$ точек. Докажите, что эти точки можно соединить n непересекающимися отрезками.

Сначала соединяем попарно точки произвольным образом. В качестве полуинварианта рассмотрим сумму длин этих отрезков. Если никакие два не имеют общих точек, то задача решена. В противном случае находим два отрезка, имеющих общую точку. Если отрезки лежат на одной прямой, то заменим их на непересекающиеся отрезки меньшей общей длины с концами в этих же точках. Пусть отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и E – их общая точка. Тогда $AC \le AE + EC$ и $BD \le BE + ED$, причём одно из этих неравенств строгое. Складываем неравенства и получаем $AC + BD < AE + BE + EC + ED = AB + CD$.

Пример 5. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два числа и записать вместо них их *НОД* и *НОК*. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

Полуинвариант – количество пар чисел, в которых одно делит другое.

Обозначим a и b – числа, с которыми выполняется операция, a_1, $a_2,\ldots,$ a_n – остальные числа. Отметим, что если одно из чисел a или b делит другое, то в результате выполнения операции над ними новое число – не появляется. Пусть теперь ни a не делит b, ни b не делит a. Обозначим *c=НОД(a,b)* и *d=НОК(a,b)*. После операции на доске будут числа: c, d, a_1, $a_2,\ldots,$ a_n. Посмотрим, как изменилось количество пар чисел, в которых одно делит другое. Все пары, в которых какое-нибудь a_i делилось на какое-нибудь a_j – сохранились. Далее, если какое-нибудь a_i делилось только на a или только на b, то эту пару заменяет пара c, a_i. Если какое-нибудь a_i делилось на a и на b, то эти пары заменяют пара c, a_i и d, a_i. Кроме того, добавляется пара c, d. Итак, количество пар чисел, в которых одно делит другое, после каждой операции увеличивается, по крайней мере, на одну. Количество пар – конечное, следовательно, когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

1. На столе лежат несколько кучек спичек (но не менее трех). Во всех кучках число спичек разное. Каждым ходом можно переложить одну спичку из самой большей кучи в самую меньшую кучу, если при этом не образуется равных кучек. Докажите, что при любом начальном наборе кучек можно будет сделать лишь конечное число перекладываний.

2. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися числами проделывают ту же операцию. Докажите, что за несколько шагов все числа на окружности будут равны.

3. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек (не на первой и не на последней). Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

4. На доске написаны числа 1,2,…,1999. Разрешается заменять любое число на произведение его цифр, и любые два числа на их сумму. Можно ли такими заменами добиться, чтобы среди чисел на доске появилось 2000000?

5. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно не пересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.

6. На плоскости дано N точек, некоторые из них соединены отрезками. Известно, что из каждой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что эти точки можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы отрезков с разноцветными концами было не более N.

7. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку особой, если более половины соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета.

Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая из особых точек и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

8. Некоторую четверку чисел a, b, c, d каждую минуту заменяют на четверку $a+b, b+c, c+d, d+a$. Через несколько таких операций четверка чисел оказалась такой же, как в начале. Докажите, что все числа равны нулю.

9. Квадратное поле разбили на 100 одинаковых квадратных участков, из которых 9 поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только на те участки, у которых не менее двух соседних (имеющих общую сторону) участков поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

10. По кругу стоят несколько ребят, у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый из них передает половину своих конфет стоящему справа. При этом если число конфет у кого-нибудь нечетно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету. Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех ребят будет поровну конфет.

11. Библиотекарь обнаружил, что тома Полного собрания сочинений В.Скотта (а это больше 20 томов) стоят на полке в полнейшем беспорядке. Чтобы расположить их по порядку, библиотекарь решил поступать так: обнаружив два тома, расположенных в неправильном порядке (т.е. том с меньшим номером стоит правее тома с большим номером) он меняет их местами. Иными словами он пользуется следующим алгоритмом: пока (есть два тома, стоящие в неправильном порядке) {Поменять эти тома местами} конец цикла. Библиотекарь при этом не придерживается никакого правила выбора пары неправильно стоящих томов. Доказать, что, тем не менее, за конечное число перестановок библиотекарь достигнет поставленной цели.

12. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

13. Непустые конечные множества A_1, A_2, A_3,… состоят из целых чисел, причем при $n \geq 2$ каждый элемент множества A_n является средним арифметическим двух или более элементов множества A_{n-1}.

Докажите что в этой последовательности конечное число множеств.

14. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда – в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A.

15. В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.

Правило крайнего

Для решения рассматриваемой задачи часто бывает полезно рассмотреть «крайний случай». Например, рассмотреть две точки находящиеся на максимальном (или минимальном) расстоянии, угловую клетку, Крайними свойствами может обладать и объект, с виду расположенный в середине (узкое место).

Пример 1. На шахматной доске расставлены числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все числа равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

Пример 2. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.

Решение. Рассмотрим трех грибников, набравших больше всех. Допустим, они вместе набрали менее 33 грибов. Нетрудно заметить, что тогда грибник, набравший среди них меньше всех грибов, набрал не более 9 грибов (10+11+12=33). Но тогда остальные четыре грибника набрали не более 8+7+6+5=26 грибов, а в целом набрано менее 33+26 грибов. Противоречие.

Пример 3. Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы разность любых двух соседних чисел (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50? Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Решение. На первый вопрос ответ отрицательный. У числа 50 (центрального) нет соседей. Для ответа на второй вопрос достаточно привести пример:

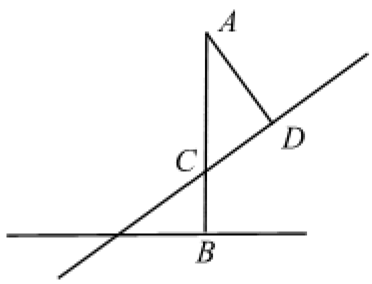
$$51 - 1 - 52 - 2 - 53 - 3 - \ldots 98 - .48 - 99 - 49 - 100 - 50.$$

Пример 4. На прямой задано множество точек. При этом каждая точка этого множества является серединой отрезка двух каких-то других точек этого множества. Докажите, что множество – бесконечное.

Решение. Предположим, что множество конечное. Рассмотрим крайнюю справа точку этого множества. Эта точка является серединой отрезка двух каких-то других точек этого множества, но тогда один из концов этого отрезка правее рассматриваемой точки и является элементом множества. Противоречие.

Пример 5. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

Решение. Среди всех перпендикуляров, опущенных из точки *A*, выберем перпендикуляр *AB* наименьшей длины. Заметим, что он искомый. Допустим, что это не так. Тогда этот перпендикуляр попадает не на сторону многоугольника, а на ее продолжение. При этом он пересечет другую сторону *MN* в некоторой точке С. Рассмотрим перпендикуляр *AD*, опущенный на сторону *MN* или ее продолжение. Поскольку $AB < AC < AD$ получаем противоречие с минимальностью длины выбранного перпендикуляра.



В примере 5 сработал метод минимального контрпримера: допустили, что утверждение задачи неверно. Выбрали минимальный в некотором смысле пример. И оказалось, что его можно ещё уменьшить, значит, получили контрпример, а с ним искомое противоречие.

1. На шахматной доске стоит несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других?

2. Во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены крестики и нолики с выполнением следующего условия: у каждого крестика среди соседей больше крестиков, чем ноликов (соседними считаются все клетки, имеющие с рассматриваемой хотя бы одну общую точку). Докажите, что крестиков бесконечно много.

3. Восемь грибников собрали 37 грибов, причем никакие двое не собрали поровну. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

4. На плоскости задано множество точек. При этом каждая точка этого множества является серединой отрезка двух каких-то других точек этого множества. Докажите, что множество – бесконечное.

5. Двадцать пять астрономов на двадцати пяти разных планетах наблюдают друг за другом, причем каждый наблюдает за ближайшим к нему (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что а) есть две планеты, астрономы которых наблюдают друг за другом; б) хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

6. Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

7. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются меньше, чем на 5.

8. На окружности стоят 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Что это за числа и как они стоят на окружности?

9. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

10. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

11. Докажите, что у многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

12. Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город страны B, оттуда – в самый удаленный от B город C и т.д. Докажите, что если C и A – разные города, то путешественник никогда не вернется домой (расстояния междлу городами попарно различные).

13. В течение дня в библиотеке побывало 100 читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 100 человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз)

14. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2.

15. В метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть ее на ремонт (без права проезда через нее), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся станции на любую оставшуюся.

16. На прямой имеется $2n+1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

Преобразование числовых наборов и экстремальные значения выражений

При решении рассматриваемых здесь экстремальных задач (задач на наибольшие и наименьшие значения) с наборами целых чисел необходимы знания свойств чётных и нечётных чисел; представление делимого через делитель, частное и остаток; понятие модуля (абсолютной величины) числа; умение вводить буквенные обозначения неизвестных величин и записывать условия задачи с помощью уравнений.

Пример 1. Каждое из чисел $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ равно $+1$ или -1. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение

$$aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg.$$

Ответ: 4.

Решение. Не трудно проверить, что значение выражения – чётное число. Ясно, что больше 6 оно быть не может. Кроме того, для того, чтобы оно равнялось 6, необходимо, чтобы слагаемые, перед которыми стоит знак «+» (aek, bfg, cdh), были положительны, а слагаемые, перед которыми знак «–» (afh, bdk, ceg), были отрицательны. Но $aek\cdot bfg\cdot cdh=afh\cdot bdk\cdot ceg$, значит условие, дающее значение 6, не выполнимо. Остаётся показать, что выражение может принимать значение 4. Например, a=1, b=1, c=-1, d=1, e=1, f=1, g=1, h=-1, k=1.

Пример 2. Какое наименьшее число можно получить, расставив скобки в выражении $\left|9^2-8^2-7^2-6^2-5^2-4^2-3^2-2^2-1^2\right|$?

Ответ: 1.

Решение. Любая расстановка скобок при их раскрытии приводит к арифметическому выражению вида $81 \pm 64 \pm 49 \pm 36 \pm 25 \pm 16 \pm 9 \pm 4 \pm 1$, где перед каждым из слагаемых будет стоять один из указанных знаков. Поскольку в этом выражении имеется нечетное количество нечетных чисел, результатом вычислений станет нечетное число. Следовательно, значение модуля данного выражения будет не меньше 1. Приведем пример расстановки скобок, которая обеспечивает 1.

$$\left|\left(\left(\left(9^2-8^2\right)-\left(7^2-6^2\right)\right)-\left(\left(5^2-4^2\right)-3^2\right)\right)-\left(2^2-1^2\right)\right|=1$$

Пример 3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух элементов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх элементов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответ: *а*) нет, *б*) да, *в*) 549.

Решение. *а*) Если последовательность состоит из двух элементов, a и $10a$, то $a+10a=3024$. Уравнение $11a=3024$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух элементов.

б) Последовательность может состоять из трёх элементов: 252, 2520, 252.

в) Чтобы получить наибольшее количество членов при фиксированной их сумме, надо брать слагаемые наименьшей возможной величины. Так как наименьшее натуральное число – это 1, то для построения последовательности наибольшей длины рассмотрим пары чисел 1 и 10. Их сумма 11. Поскольку $3024=11\cdot 274+10$, то искомая последовательность максимальной длины имеет вид 10, 1, 10, 1, 10, …,1, 10 и состоит из $274\cdot 2+1=549$ членов.

Пример 4. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответ: *а*) 36, *б*) отрицательных, *в*) 16.

Решение. *а*) Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма всех чисел набора равна их количеству, умноженному на их среднее арифметическое: $9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m)$. В левой части равенства каждое слагаемое делится на 9, поэтому в правой части второй множитель (количество всех чисел) делится на 9, и это число больше 27 и меньше 45. Значит, чисел написано 36.

б) Полученное выше равенство преобразуется в равенство $13l=14k+5m$. Откуда $13l\geq 14k$ и, значит, $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Итак, $9k-18l=-5\cdot 36=-180$, откуда $k=2l-20$. Так как $k+l\leq 36$, получаем $3l-20\leq 36$, $3l\leq 56$, $l\leq 18$, $k=2l-20\leq 16$, то есть положительных чисел не более 16. Приведём пример, когда их ровно 16: 16 раз написано число 9, 18 раз написано число -18, два раза написан 0.

1. Числа набора 1, 2, 3, 4 расставьте в выражение $a\cdot b-c:d$ так, чтобы разным буквам соответствовали разные числа, а значение выражения стало максимально возможным. Укажите это максимальное значение.

2. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 10. Какое наименьшее и наибольшее по модулю значения возможно получить, расставляя между этими числами знаки «+» и «$-$»?

3. Произведение 10 целых чисел равно 1. Найдите наименьшую по модулю и наибольшую суммы, которые могут составлять эти числа.

4. Каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

5. Перед каждым из чисел 6, 7, 8, 9, 10 и 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

6. Найти дробь с наименьшим знаменателем, удовлетворяющую условию расположения между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$.

7. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.

1) Может ли последовательность состоять из двух элементов?

2) Может ли последовательность состоять из трёх элементов?

3) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

8. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

1) Сколько чисел написано на доске?

2) Каких чисел написано больше положительных или отрицательных?

3) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

9. Назовём кусок верёвки стандартным, если её длина не меньше 93 см, но не больше 96 см.

а). Некоторый моток верёвки разрезали на 31 стандартный кусок, среди которых есть куски различной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было разрезать тот же самый моток верёвки?

б). Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l, можно разрезать на стандартные куски.

10. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

11. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3\times3\times3$?

Десятичное представление натурального числа и делимость

Рассмотрим натуральное число 375. Естественно, $375=3\cdot100+7\cdot10+5\cdot1$ или $375=3\cdot10^2+7\cdot10^1+5\cdot10^0$.

Для обозначения трёхзначного числа $\overline{abc}$, цифры которого нам неизвестны, принято аналогично использовать запись $\overline{abc}=a\cdot10^2+b\cdot10+c$. Такое представление естественно распространяется и на двухзначные, четырёхзначные, … числа. Оно позволяет удобным образом записывать действия с многозначными заранее неизвестными числами.

Пример 1. Из двузначного числа вычли двузначное число, получившееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат делится на 9.

Решение. По условию задачи рассматривается число $\overline{ab}$-$\overline{ba}$ =
=$10a$+b-$10b$-a=$9a$-$9b$=$9(a$-$b)$. Значит, делится на 9.

Пример 2. Если к некоторому двузначному числу прибавить сумму его цифр, его цифры поменяются местами. Что это за число?

Решение. Условию задачи для числа $\overline{ab}$ соответствует уравнение $(10a+b)+(a+b)=10b+a$ или $5a=4b$. Отсюда следует, что цифра b кратна пяти, $b=5$, $a=4$. Итак, искомое число 45.

Пример 3. Найдите все четырехзначные числа, уменьшающиеся в 19 раз при отбрасывании первой цифры.

Решение. По условию задачи:

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=19\cdot(100b+10c+d),$$

$$1000a=18\cdot100b+18\cdot10c+18d.$$

Из последнего соотношения легко заметить, что $a=9$ и после подстановки a и сокращения на 18 получаем, что $500=100b+10c+d$. Ответ: 9500.

Пример 4. Признаки делимости на 3 и 9.

Рассмотрим, например, четырёхзначное число, цифры которого нам неизвестны: $\overline{abcd}$. Представим это число в виде двух слагаемых:

$\overline{abcd} = (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c + d)$. Заметим, что первое слагаемое $(a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9)$ делится и на 3 и на 9. Если сумма цифр $a + b + c + d$ числа $\overline{abcd}$ делится на 3 (на 9), то и сумма $(a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9) + (a + b + c + d)$ будет делиться на 3 (на 9). Это означает, что и число $\overline{abcd}$ делится на 3 (на 9). Обратно. Если число $\overline{abcd}$ делится на 3 (на 9), то сумма цифр $a + b + c + d$ числа $\overline{abcd}$, как разность $\overline{abcd} - (a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9)$ двух чисел, делящихся на 3 (на 9), тоже делится на 3 (на 9). Таким образом, для четырёхзначных чисел доказан признак делимости на 3 (на 9). Аналогично доказываются признаки делимости на 3 и на 9 при любом другом количестве знаков в числе:

Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Для успешного решения задач на делимость необходимо знать признаки делимости числа на 2, 3, 4, 5, 9, 11 и др.

1. Цифры двузначного числа перемножили между собой, и полученный результат умножили на само число. Получилось число 1533. Найдите исходное число.

2. Найдите все трехзначные числа, которые уменьшаются в 13 раз при вычеркивании средней цифры.

3. Можно ли к заданному числу приписать по одной цифре вначале и в конце так, чтобы получившееся число делилось на 15?

4. Число N состоит из 10 единиц и 10 двоек (в некотором порядке). Может ли число N+6 быть простым?

5. Восстановите стертые цифры числа 843**6, если известно, что оно делится на 36.

6. В числе переставили цифры и получили число в три раза меньшее. Докажите, что исходное число делится на 27.

7. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

8. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

9. Может ли число, записанное с помощью 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек быть точным квадратом некоторого натурального числа?

10. Является ли число, составленное из пятидесяти пяти единиц, составным.

11. Найдите трехзначное число, которое в пять раз больше произведения своих цифр.

12. Докажите, что число $\overline{abcabc}$ не может быть полным квадратом натурального числа.

13. Решите уравнение: $\overline{ab}+\overline{ba}=x^2$, где слева двузначные числа.

14. Предпоследняя цифра квадрата натурального числа нечетна. Докажите, что его последняя цифра 6.

15. В каком году родился человек, если в 2001 году ему исполнилось столько лет, какова утроенная сумма цифр года его рождения?

16. Докажите что число $\underbrace{111\ldots111}_{81\ \textit{единица}}$ делится на 81.

17. Найдите сумму пятизначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 1, 3, 5, 7, 9.

Простые и составные числа

Натуральное число называется составным, если оно равно произведению двух меньших натуральных чисел, отличных от 1. В противном случае оно называется простым.

Числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 – простые, а числа 6, 104, 345, 1024 – составные.

Число 1 по определению не является ни составным, ни простым, а все другие натуральные числа либо простые, либо составные.

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число, за исключением единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей единственным образом.

Далее будем использовать запись $a \vdots b$, которая читается так: a делится нацело на b. Это не результат деления, а запись свойства. Так, например, $8 \vdots 4$ выполняется, а $7 \vdots 3$ – нет.

Свойство 1. Если a,b натуральные числа, а p – простое и $(a \cdot b) \vdots p$, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

Доказательство. По основной теореме арифметики разложение числа $a \cdot b$ на простые множители содержит число p. С другой стороны по этой же теореме числа a и b раскладываются на простые множители.

Перемножив эти разложения, получим разложение числа $a \cdot b$. Значит, число p входит в разложение одного из a или b, а это и означает его делимость на p.

Свойство 1 можно существенно усилить, если ввести понятие взаимной простоты чисел.

Определение. Два натуральных числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей отличных от 1.

Свойство 2. Пусть m и n взаимно простые числа. Тогда, если $a \vdots m$ и $a \vdots n$, то $a \vdots (mn)$; если $a \cdot n \vdots m$, то $a \vdots m$.

Для успешного разложения чисел на множители полезно также знать признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 11 и др.

Пример 1. Разложения чисел на простые множители:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 144 = 2^4 \cdot 3^2,\ 1024 = 2^{10},$$

$$1000000 = 2^6 \cdot 5^6,\ 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Пример 2. Вставьте вместо звёздочек цифры так, чтобы число 34*5* делилось на 36. Назовите все такие числа.

Ответ: 34452, 34056, 34956.

Решение. Число тогда и только тогда делится на 36, когда оно одновременно делится на 4 и на 9. Для делимости на 4 надо, чтобы две последние цифры составляли число, делящееся на 4. Под это условие подходят здесь только 52 и 56. Для делимости на 9 надо, чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Этим условиям удовлетворяют числа 34452, 34056, 34956.

Пример 3. Решите уравнение $x \cdot y = 7$ в целых числах и найдите наименьшее значение $x + y$.

Ответ: -8.

Решение. Из условия задачи следует, что 7 делится на x. Так как 7 – простое число, то x равно или ± 1 или ± 7, при этом оба случая возможны при $y=\pm 7$ и $y=\pm 1$ (соответственно). Таким образом, уравнение имеет четыре решения: $x=\pm 1$, $y=\pm 7$ и $x=\pm 7$, $y=\pm 1$. Наименьшее $x + y = -8$.

Пример 4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Решение (предложено древнегреческим математиком Евклидом). Предположим, что множество простых чисел конечно и это числа $p_1, p_2, ..., p_n$. Рассмотрим число $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. По основной теореме арифметики a раскладывается на простые множители. Однако, a не может делиться ни на одно из $p_1, p_2, ..., p_n$.

Действительно, если $a = p_1 b$, то из $1 = a - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = p_1(b - p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots p_n)$ следует, что 1 делится на p_1, что невозможно. Значит, в разложении a присутствуют другие простые числа. Противоречие.

1. На какое количество нулей оканчивается произведение первых 2013 простых чисел?

2. Какие цифры нужно вставить вместо звёздочек, чтобы число 42*4* делилось на 72? Найдите все такие пятизначные числа.

3. Если A и B – простые числа, большие 3, то докажите, что разность их квадратов делится на 8.

4. Докажите, что числа вида 111...11 ($2n$ единиц) являются составными?

5. Какие две цифры надо поставить вместо звёздочек, чтобы число 517** делилось на 6, на 7 и на 9?

6. На какое количество нулей заканчивается число $25! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 25$?

7. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой делитель (не считая самого числа) равен 91.

8. Произведение трёх последовательных трёхзначных чисел делится на 20000. Какую сумму могут иметь эти числа?

9. Натуральные числа a, b и c таковы, что числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ – простые. Докажите, что среди них найдутся равные числа.

10. Можно ли числа от 1 до 17 выписать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

11. Докажите, что если $65A = 56B$, то $A+B$ – составное.

12. Разложите на простые множители наименьшее натуральное число, половина которого точный квадрат, треть – точный куб, а пятая часть – точная пятая степень

13. На доске записаны числа 6, 12, 24, 36. Разрешается умножить на 2 или на 3 любые два из них. Можно ли сделать все числа равными за несколько таких операций?

Разложение на множители

При решении задач, использующих разложение на множители алгебраических выражений, необходимы знания формул сокращённого алгебраического умножения, умение выделять в выражении полный квадрат и др.

Пример 1. Решите уравнение $x^3+x^2+x-3=0$ в целых числах.

Ответ: x=1.

Решение. Перенеся 3 в правую часть, уравнение можно представить в виде $x(x^2+x+1)=3$. Так как 3 простое число и целое число x делит 3, то x может быть 1, 3, -1, -3. Если x=1, то равенство $x^2+x+1=3$ выполнено; если x=3, то $x^2+x+1=13$ и исходное равенство не выполняется; если x=-1, то $x^2+x+1=1$; если x=-3, то $x^2+x+1=7$.

Пример 2. При каких целых m число m^2+6m+8 является простым?

Ответ: $m=-1, \quad m=-5$.

Решение. $m^2+6m+8=m^2+6m+9-1=(m+3)^2-1=(m+2)(m+4)$ – данное число может быть простым, только когда один из двух сомножителей равен 1 или –1, при этом оба сомножителя одного знака, так как простые числа положительны. Значит, достаточно проверить будет ли число простым, если $m+2=1$ и $m+4=-1$, откуда и получается ответ.

Пример 3. Докажите, что при любом целом значении числа n число n^7-n делится на 42.

Решение. Используя формулы сокращенного умножения, получаем

$n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$.

Это число делится и на 2 и на 3, так как имеет сомножителями три подряд идущих числа. Далее, $n^2-n+1=n^2-n-6+7=(n-3)(n+2)+7$, $n^2+n+1=(n-2)(n+3)+7$. Тогда, продолжая преобразования, имеем $n^7-n=(n-1)n(n+1)\big((n-3)(n+2)+7\big)\big((n-2)(n+3)+7\big)=$ $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+7A$. Первое слагаемое – произведение семи подряд идущих натуральных чисел. Значит, одно из них делится на 7.

1. Докажите, что выражение n^2+2n-m^2-2m, где m и n – натуральные нечетные числа, делится на 4.

2. Можно ли число 2013 представить в виде суммы попарных произведений трёх последовательных натуральных чисел?

3. Найдите все натуральные числа x, при которых значение многочлена $x^2-4x+11$ будет квадратом натурального числа.

4. Найдите все пары целых чисел (x, y) удовлетворяющих уравнению $x^2=y^2+8y+35$.

5. Сколько натуральных решений имеет уравнение
$x^3+7^3=y^3$?

6. Решите в целых числах уравнения:

а) $x\cdot y=x+y$; *б)* $1+n+n^2+n^3=2^m$.

7. Натуральное число n является произведением двух простых различных чисел, а сумма всех его делителей, считая 1, но, не считая n, равна 1000. Найдите такие n.

8. Найдите все пары натуральных чисел, m, n, удовлетворяющих уравнению: $2^m-2^n=1984$.

9. Докажите, что для любого натурального a число a^3-1 не является степенью двойки.

10. Найдите все пары натуральных чисел, m, n, удовлетворяющих уравнению: $3\cdot 2^n+1=m^2$.

Остатки от деления целых чисел и арифметика остатков

Сумма, разность и произведение целых чисел – целое число. Частное от деления одного целого числа на другое не обязательно целое число.

Что означает деление с остатком числа 142 на 17?

Это означает, что можно написать равенство $142=8\cdot 17+6$. Здесь 6 – остаток от деления 142 на 17.

Определение. Разделить целое число n на натуральное число m с остатком означает: представить его в виде: $n=km+r$, где k и r целые числа, причем $0\le r<m$. Число r называется остатком от деления n на m.

Пример 1. Как по определению поделить с остатком *а*) 72 на 5, *б*) 4 на 9, *в*) 18 на 3, *г*) –72 на 5?

Решение. *а*) $72 = 14 \cdot 5 + 2$; *б*) $4 = 0 \cdot 9 + 4$; *в*) $18 = 6 \cdot 3 + 0$; *г*) $-72 = (-15) \cdot 5 + 3$.

Теорема 1. Любое целое n всегда можно поделить с остатком на натуральное m, причем единственным образом.

Пример 2. Найдите остатки от деления на 17 для чисел 142, 165, их суммы и суммы их остатков. Сравните два последних остатка.

Решение. Остатки от деления 142 на 17, 165 на 17 равны, соответственно, 6 и 12. Остаток от деления суммы 142+165=307 на 17 равен 1 и остаток от деления на 17 суммы остатков 6+12=18 тоже равен 1.

Оказывается – это общее свойство.

Теорема 2 (свойства остатков).

1. Сумма двух чисел и сумма их остатков от деления на m дают одинаковые остатки при делении на m.

2. Произведение двух целых чисел и произведение их остатков от деления на m дают одинаковые остатки при делении на m.

Доказательство свойства 1. Пусть $a = k_1 m + r_1$, $b = k_2 m + r_2$ – поделили a и b на m с остатком. Теперь $r_1 + r_2 = k_3 m + r$ $(0 \le r < m)$ – поделили сумму остатков на m. Тогда можно записать

$$a + b = k_1 m + r_1 + k_2 m + r_2 = k_1 m + k_2 m + k_3 m + r = (k_1 + k_2 + k_3)m + r.$$

Поскольку $0 \le r < m$, то r – остаток от деления $a + b$ на m.
Свойство 2 докажите самостоятельно.

Пример 3. Найдите остаток от деления 9^{100} на 8.

Ответ: 1.

Решение. Число 9 имеет остаток 1 при делении на 8. Остаток от деления 9^{100} на 8 такой же, как у произведения остатков 1^{100} (свойство 2), то есть 1.

1. Найдите остаток от деления 9^{99} на 7.

2. Найдите остаток от деления $1996 \cdot 1997 \cdot 1998 + 1999^3$ на 7.

3. Вы пришли в магазин и решили купить 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 копейки, линейку за 9 копеек, 2 общие тетради по 18 копеек и 12 тонких тетрадей. Продавец сообщил общую сумму – 5 рублей 27 копеек. Не ошибся ли он?

4. Какие из утверждений верны:

1) если число при делении на 8 дает остаток 3, то при делении на 4 оно также дает остаток 3;

2) если число при делении на 4 дает остаток 3, то при делении на 8 остаток сохраняется;

3) если число при делении на 15 дает остаток 7, то при делении на 5 остаток не равен 3;

4) если число при делении на 15 дает остаток 3, то при делении на 9 остаток не равен 6?

5. Можно ли утверждать, что для любых двух натуральных чисел a и b хотя бы одно из четырех чисел $a, b, a+b, a-b$ делится на 3?

6. Найдите остаток от деления суммы 111+112+…+121 при делении на 11.

7. Известно, что $p, p+10, p+14$ – простые числа. Найдите p.

8. Найдите остаток от деления некоторого натурального числа на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 7, а остаток от деления на 6 равен 4.

9. Докажите, что число при делении *а*) на 3, *б*) на 9, имеет тот же остаток, что и сумма его цифр.

10. Докажите, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

11. В трехзначном числе n первые две цифры одинаковые, а последняя цифра – 5. Кроме того, известно, что n дает остаток 7 при делении на некоторое однозначное число. Найдите все такие n.

Перебор возможных остатков от деления

При решении задач на делимость может оказаться полезным перебор возможных остатков:

Пример 1. Докажите, что n^3+2n всегда делится на 3.

Решение. Будем составлять таблицу остатков выражения n^3+2n в зависимости от остатков числа n.

n	0	1	2
n^3	0	1	2
$2n$	0	2	1
n^3+2n	0	0	0

Итак, число n при делении на 3 имеет возможные остатки 0,1,2 – заполнили первую строку. Тогда n^3 будет иметь такие же остатки, как $0^3, 1^3, 2^3$, то есть 0,1,2 – вторая строка; $2n$ – такие же остатки как $2\cdot 0,\ 2\cdot 1,\ 2\cdot 2$, то есть 0, 2, 1 – третья строка. Теперь столбиком складываем остатки n^3 и $2n$ получим 0, 3, 3, т.е. остатки при делении на 3 – 0,0,0. Это означает, что независимо от остатков n, выражение n^3+2n всегда имеет при делении на 3 остаток 0, то есть делится нацело на 3.

Пример 2. Докажите, что n^3+2 не делится на 9.

Решение. Составим таблицу остатков от деления на 9.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
n^3+2	2	3	1	2	3	1	2	3	1

Остаток от деления n^3+2 на 9 не равен 0 ни при каких значениях n.

Пример 3. Докажите, что если a^2+b^2 делится на 3, то a и b делятся на 3.

Решение. Остатки от деления на 3 у квадрата целого числа есть 0 и 1. При сложении двух квадратов a^2+b^2 остаток 0 может быть только, когда оба числа делятся на 3.

n	0	1	2
n^2	0	1	1

1. Докажите, что n^5+4n делится на 5, а n^3-n+2 не делится на 5.

2. Докажите, что если a^2+b^2 делится на 21, то оно делится на 441.

3. *а*) числа $p,\ p^2+2$ – простые. Докажите, что p^3+2 – простое.

б) числа $p,\ 2p+1,\ 4p+1$ – простые. Найдите p.

в) числа $p,\ 8p^2+1$ – простые. Найдите p.

г) числа $p,\ 4p^2+1,\ 6p^2+1$ – простые. Найдите p.

4. Докажите, что уравнение $x^2-3y^2=8$ не имеет решений в натуральных числах.

5. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

6. Длины сторон и диагонали прямоугольника – натуральные числа. Докажите, что величина его площади делится на 12.

7. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

8. На параболе

а) $5x^2-11y=7$; *б*) $5x^2+11=2y$

найдите точки с целыми координатами.

9. Три простых числа *p, q* и *r*, большие трех, таковы $p = p$, $q = p + d$, $r = p + 2d$. Докажите, что d делится на 6.

10. Два брата продали стадо баранов и получили за каждого барана столько рублей, сколько в стаде было баранов. При делении выручки они из общей суммы денег брали по очереди по 10 рублей. Оказалось, что при таком способе брату, который брал деньги вторым, осталось меньше десяти рублей, и тогда первый отдал ему в качестве компенсации нож. Сколько стоит нож?

11. Существуют ли нечетные числа *x, y, z* такие, что $xy+1$, $yz+1$, $zx+1$ – полные квадраты.

12. Докажите, что число 10…050…01 не является кубом целого числа.

13. Перемножим все простые числа от 2 до 1999 и получим число $a = 2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 1999$. Докажите, что ни одно из чисел $a-1$ и $a+1$ не является квадратом натурального числа.

14. Решите в натуральных числах уравнение
$1!+2!+3!+\ldots+m!=n^2$.

Квадратный трёхчлен

Пример 1. Пусть $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ - три квадратных трёхчлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что каждый из них имеет хотя бы один общий корень с суммой двух других. Докажите, что $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ имеют общий корень.

Решение. Обозначим x_1 – общий корень $f(x)$ и $g(x)+h(x)$, x_2 – общий корень $g(x)$ и $f(x)+h(x)$, x_3 – общий корень $f(x)+g(x)$ и $h(x)$. Тогда квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом $f(x)+g(x)+h(x)$ имеет три корня x_1, x_2, x_3. Значит, какие-то два из них совпадают. Например, если $x_1=x_2$, то $f(x_1)=0$, $g(x_1)=0$ и $g(x_1)+h(x_1)=0$ и $h(x_1)=0$.

Пример 2. Про квадратные трёхчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а $f_1 - f_2$ – корней не имеет. Докажите, что $f_1 + f_2$ – имеет корни.

Решение. Предположим, что $f_1 + f_2$ – не имеет корней. Отметим, что отсутствие корней в данном случае гарантирует то, что все принимаемые значения одного знака. Если $f_1 - f_2$ и $f_1 + f_2$ одного знака, то их сумма 2 f_1 того же знака, что невозможно. Если $f_1 + f_2$ и $f_1 - f_2$ разных знаков, то их разность равная 2 f_2 одного знака.

Пример 3. Пусть $ax^2+2bx+c$, $cx^2+2ax+b$, $bx^2+2cx+a$ - квадратные трёхчлены с положительными коэффициентами, причём каждый из них имеют корень. Докажите, что $a=b=c$.

Решение. Из условия следует, что имеют место неравенства: $b^2 \ge ac$, $a^2 \ge cb$ и $c^2 \ge ba$. Воспользуемся положительностью коэффициентов и запишем неравенства $ab^2 \ge a^2c \ge c^2b \ge b^2a$. Следовательно, на самом деле имеют место равенства. Итак, $b^2=ac$, $a^2=bc$, поделив, левые и правые части друг на друга получаем $a=b=c$.

Пример 4. Найдите все квадратные трёхчлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие при всех x неравенствам: $x^2+x+1 \le P(x) \le 2x^2+2x+2$

Решение. Обозначим $P(x)=ax^2+bx+c$. Подставив $x=0$ в исходное неравенство, получаем оценку на c: $1 \le c \le 2$. Поскольку $x^2+x+1>0$ при всех x получаем, что $a \ge 1$. Из $(2-a)x^2+(2-b)x+2-c \ge 0$ при всех x получаем, что $a \le 2$.

Случай 1. $a=1$. В условии левая часть неравенства принимает вид $(b-1)x+(c-1) \ge 0$. Очевидно, что $b=1$, иначе при $x<\dfrac{1-c}{b-1}$ левое неравенство нарушается. Кроме того, если $c=2$, правое неравенство равносильно $x^2+x \ge 0$ и не выполняется при $x=-1/2$. Итак, в рассматриваемом случае только квадратный трёхчлен x^2+x+1 удовлетворяет условию задачи.

Случай 2. $a=2$. В условии правая часть неравенства принимает вид: $(2-b)x+2-c \ge 0$. Очевидно, что $b=2$, а если $c=1$, то левое неравенство равносильно $x^2+x \ge 0$ и не выполняется при $x=-1/2$. В рассматриваемом случае только квадратный трёхчлен $2x^2+2x+2$ удовлетворяет условию задачи.

1. На доске записано уравнение $x^2+2x\cdot ?+3\cdot(?+?)=0$. Докажите, что любую тройку попарно различных целых чисел можно так расставить в уравнении вместо вопросительных знаков, что полученное уравнение будет иметь, по крайней мере, один корень.

2. Известно, что хотя бы один из трёхчленов x^2+ax+b, $x^2+a^2x+b^2$, $x^2+a^3x+b^3, \ldots$ имеет вещественные корни. Докажите, что из этого множества трёхчленов можно выбрать бесконечно много трёхчленов, имеющих вещественные корни.

3. Коэффициенты a, b и c квадратного уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ являются степенями двойки. Докажите, что если корни этого уравнения – целые числа, то эти корни совпадают.

4. На доске записан квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Вместо трёхчлена $P(x)$ записывают трёхчлен $\dfrac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$, а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.

5. Значения квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b$ в двух последовательных целых точках – соответственно квадраты двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трёхчлена во всех целых точках – точные квадраты.

6. Каждый из квадратных трёхчленов $P_1(x) = x^2 + px + q$ и $P_2(x) = x^2 + qx + p$ имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трёхчленов $Q_1 = x^2 + (p-2)x + 1$ и $Q_2 = x^2 + (q-2)x + 1$ имеет корень.

7. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Докажите, что при всех $x \geq 1$ и $y \geq 1$ выполняется неравенство $P\left(x^2 + y^2\right) \geq P(2xy)$.

8. Найдите все тройки (a, b, c) $(a \neq b, a \neq 0, b \neq 0)$ действительных чисел, для которых параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = bx^2 + cx + a$ имеют общую вершину.

9. Про квадратные трёхчлены f_1, f_2, f_3, с разными старшими коэффициентами известно, что их разности $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, $f_3 - f_1$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.

10. Известно, что $(a + b + c)c < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

Теорема Виета

Теорема Виета. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Сформулируйте теорему Виета для не приведённого уравнения.

Пример 1. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$ имеют по два целых корня?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Пусть x_1 и x_2 целые корни первого уравнения. По теореме Виета числа b и c – целые. Если второе уравнение имеет целые корни, то их произведение равно $\frac{c+1}{2}$. Следовательно, c – нечётное число, а x_1 и x_2 – тоже нечётные числа. Это означает, что b – чётное число. Но тогда сумма корней второго уравнения не является целым числом.

Пример 2. Пусть a, b, c – различные числа, причем $c \neq 0$. Доказать, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

Доказательство. Общий корень уравнений является корнем и разности этих уравнений, следовательно, общим корнем уравнений является c. Остальное доказывается по теореме Виета (из первого уравнения получаем $b + c = -a$ и применяем к третьему).

1. Пары чисел x_0 и x_1, x_0 и x_2, …, x_0 и x_n – являются корнями уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, …, $x^2 + p_nx + q_n = 0$ (соответственно). Найдите корни уравнения $x^2 + \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}x + \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{n} = 0$.

2. Квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые коэффициенты и корни, а также нечётный свободный член. Докажите, что если m целое, то целые числа m и $P(m)$ – разной чётности.

3. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет целые корни по модулю больше 2. Докажите, что число $b + c + 1$ - составное число.

4. Найдите все целые a, при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$, имеет целые корни.

5. Сколько квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами $x^2 + bx + c$ имеет целые корни, если $b + c = 30$?

6. Три коэффициента a, b, c и два корня x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, выписанные в некотором порядке, образуют ряд из пяти последовательных целых чисел. Найдите все такие многочлены.

7. Миша решил уравнение $x^2 + bx + c = 0$ и сообщил Диме оба коэффициента и оба корня, но не сказал что из них что. Сможет ли Дима узнать какое уравнение решал Миша, если все числа различные?

8. Существуют ли целые числа a, b и c такие, что каждое из уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$ имеют по два целых корня?

9. Решите уравнение:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=1-2x$$

(a,b,c – различные числа).

10. Попарно различные числа a, b и c таковы, что $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. Докажите, что $a+b+c=1$.

Многочлены с целыми коэффициентами.

Пример 1. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если a и b – числа одинаковой четности, то $P(a)$ и $P(b)$ – тоже одинаковой четности.

Решение. Рассмотрим многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами. Заметим, что если a и b – числа одинаковой четности, то разности a^k-b^k являются чётными числами. Значит, $P(a)-P(b)$ – чётное число, а $P(a)$ и $P(b)$ – одинаковой четности.

Пример 2. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если значения $P(0)$ и $P(1)$ нечетны, то у многочлена нет целых корней.

Решение. Значение $P(0)$ совпадает со свободным членом многочлена. Значит, a_0 – нечётное число. Если x – чётное число, $P(x)=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x)+a_0$ – нечётное число, как сумма чётного и нечетного чисел. Если x – нечётное число, то чётность чисел a_kx^k и a_k – одинакова, как и чётность $P(x)$ и $P(1)$. В обоих случаях получили нечётность $P(x)$ при любых целых x и $P(x)\neq 0$ так как 0 чётное число.

1. Для некоторого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами числа $P(0)$ и $P(1)$ четные. Докажите, что для любого целого числа n значение $P(n)$ – четное число.

Аналогично предыдущей задаче.

2. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$ при любых различных целых числах a и b.

Указание: a^k-b^k делится на $a-b$ при любых натуральных числах k.

3. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(-1)=2$ и $P(1)=1$.

Следствие задачи 2.

4. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1)=19$, $P(19)=98$?

Следствие задачи 2.

5. Докажите, что если a и b – целые числа, причем $f(a)=0$ и $f(b)=1$, то или $a=b+1$, или $b=a+1$.

Следствие задачи 2: 1 делится на $b-a$

6. Многочлен $P(x)$ принимает значение 1 при трех различных целых значениях переменной. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.

7. Известно, что $P(-1)=P(0)=P(1)=0$. Докажите, что для любого целого n значение $P(n)$ кратно трем.

8. Зная, что многочлен x^5+3x-2 имеет корень c, найдите многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень а) -c; б) 1/c; в) $\sqrt{c}$; г) $-2/\sqrt[3]{c}$.

9. Найдите многочлен, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10. Пусть есть многочлен, принимающий значение 7 при 4 различных целых значениях переменной. Докажите, что он не может принимать значение 14 при целом значении переменной.

Литература

1. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады Московской области 1993-2002./ Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М., 2003.
2. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике./ Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин. – М.: МЦНМО, 2010.
3. Башмаков, М.И. Задачи по математике: алгебра и анализ./ М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой. – М., 1982.
4. Васильев, Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад./ Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – М., 1988.
5. Генкин, С.А. Ленинградские математические кружки./ С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – М., 1994.
6. Каннель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи./ А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи. – М., 1997.
7. Лашкеева, В.Д. Математика для физико-математических классов./ В.Д. Лашкеева, А.Н. Саженков. – Барнаул, 1998.
8. Оскорбин, Д.Н. Математические олимпиады города Барнаула 1997-2006 годов./ Д.Н. Оскорбин, А.Н. Саженков. – Барнаул: Азбука, 2007.
9. Рукшин, С.Е. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге./ С.Е. Рукшин. – Ростов-на-Дону, 2000.
10. Саженков, А.Н. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Часть 1. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.
11. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 1. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Концепт, 2005.
12. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы. Часть 2. Практикум./ А.Н. Саженков. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2006.
13. Саженков, А.Н. IV турнир математических боёв памяти Е.В. Напалковой./ А.Н. Саженков, И.М. Исаев, О.В. Никитенко, Д.Н. Оскорбин. – Барнаул, 2003.
14. Саженков, А.Н. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности. Практикум. Часть 1./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.